Zusammenfassung
Anstieg einer Funktion in einem Punkt

Begriffe

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *und* $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *werden als* ***Differenzenquotienten*** *bezeichnet.*

Der Differenzenquotient gibt den ***Anstieg einer Sekante*** *an, die durch die Punkte* $A(x_0; f(x_0))$ *und* $B(x; f(x))$ *geht.*

Hinweise:

- ☺ *Die Punkte A und B liegen auf der Funktion f(x)*
- ☺ $h = x - x_0$ *ist der Abstand der* $x-$*Koordinaten der Punkte A und B*

Bildet man vom Differenzenquotienten den Grenzwert (Übergang von Sekante zu Tangente) so erhält man den ***Differentialquotienten****:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad bzw. \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

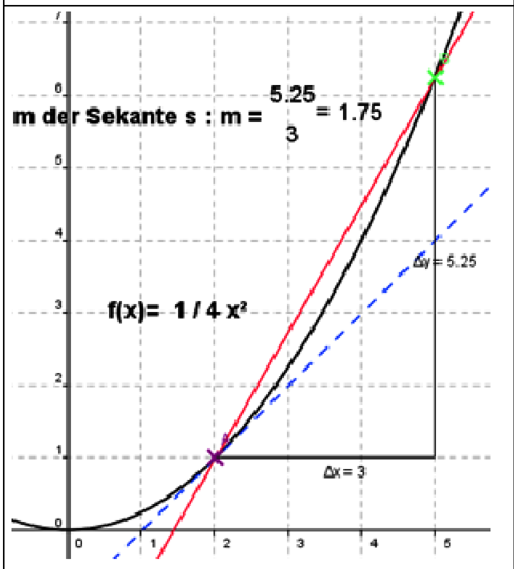
Die so berechnete Zahl gibt den ***Anstieg der Tangente*** *an die Funktion f an der Stelle* x_0 *an.*

Dieser Anstieg der Funktion f an der Stelle x_0 *wird als* ***Ableitung der Funktion f an der Stelle*** $\boldsymbol{x_0}$ *bezeichnet.*

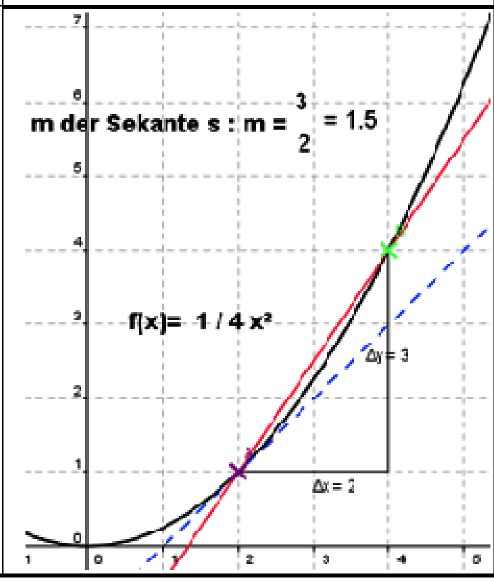
Schreibweise: $f'(x_0)$

Darstellung des Grenzübergangs am Beispiel der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ **für die Stelle** $x_0 = 2$

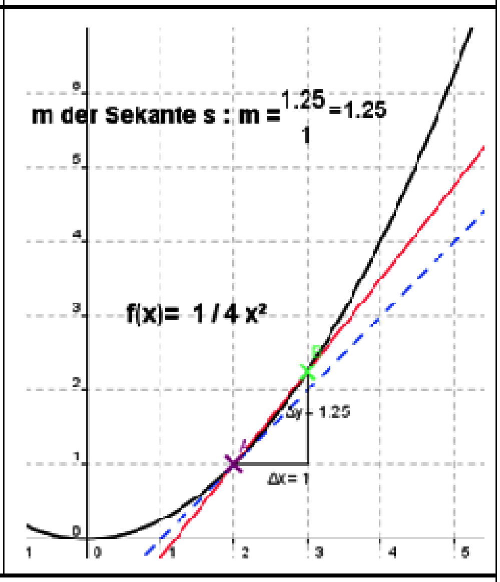
x = 5



x = 4



x = 3



Die Sekante nähert sich für $x \to x_0$ $bzw.$ $h \to 0$ der Tangente an!

Berechnung des Anstiegs an einer Stelle

Ziel	Berechne den Anstieg einer Funktion f an der Stelle x_0!
Weg	1. notiere f (x) 2. berechne $f(x_0)$ und $f(x_0+h)$ $\quad mit\ \ h \in \mathbb{R},\ h > 0$ 3. Berechne den Grenzwert $\boxed{f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$ oder $\boxed{f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$
Beispiel	Berechne den Anstieg der Funktion f $(x) = 4x^2$ an der Stelle $x_0 = 3$! 1. $f(x) = 4x^2$ 2. $f(x_0) = f(3) = 4 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$ $f(x_0+h) = f(3+h) = 4 \cdot (3+h)^2$ 3. $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ $f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{4 \cdot (3+h)^2 - 36}{h}$ (einsetzen von 1. und 2.) $f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{4 \cdot (9 + 2 \cdot 3h + h^2) - 36}{h}$ (binomische Formel) $f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{36 + 24h + 4h^2 - 36}{h}$ (Klammer ausmultiplizieren) $f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot (24 + 4h)}{h}$ (h im Zähler ausklammern) $f'(3) = \lim_{h \to 0} 24 + 4h$ (h kürzen) $f'(3) = 24$ (Grenzwert h → 0 berechnen)
Antwort	Der Anstieg der Funktion $\mathrm{f}(x) = 4x^2$ an der Stelle $x_0 = 3$ beträgt 24.
Übungen	1. Berechne den Anstieg der Funktion $f(x) = 3x^3$ an der Stelle $x_0 = 3$. $(Ergebnis: f'(3) = 81)$
	2. Berechne den Anstieg der Funktion $f(x) = 3x^3 + 4x^2$ an der Stelle $x_0 = 3$. $(Ergebnis: f'(3) = 105)$
	3. Vergleiche die Ergebnisse aus dem Beispiel und aus 1. mit dem Ergebnis von 2.! (105 = 24 + 81)
	4. Berechne den Anstieg der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle $x_0 = 4$. Hinweis: rechne mit $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $(Ergebnis: f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4})$